

①  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ , relation énergie-impulsion

on écrit :

$$\mathcal{D}(E) dE = 2 \frac{\Omega_d}{h^d} d^d \vec{p}$$

$\nwarrow g = 2s + 1 = 2$

$$\begin{cases} d^d \vec{p} \rightarrow \omega_d p^{d-1} dp \\ \omega_d = 2 \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{D}(E) dE = 2 \frac{\Omega_d}{h^d} \omega_d p^{d-1} dp \\ p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m^2 c^4} \\ dp = \frac{1}{c} \frac{E}{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}} dE \end{cases}$$

Par identification,

(2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(\epsilon) = 2 \frac{\Omega_d}{h^d c^d} \omega_d \epsilon (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{\frac{d}{2} - 1} \\ \epsilon \geq mc^2 \end{array} \right.$$

•  $d=2$  :  $\mathcal{D}(\epsilon) = 4\pi \frac{S}{h^2 c^2} \epsilon$

$S = \text{Aire}$

•  $d=3$  :  $\mathcal{D}(\epsilon) = \frac{8\pi \Omega}{h^3 c^3} \epsilon (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{1/2}$

(2)

• Energie de Fermi :  $\epsilon_F$ .

$f(\epsilon) = 1$ , facteur de Fermi ( $\epsilon < \epsilon_F$ )

$N = \int_{mc^2}^{\epsilon_F} \mathcal{D}(\epsilon) d\epsilon$ ,  $N$  : nombre de particules

$$N = \Omega_d C_0 \int_{mc^2}^{\epsilon_F} \epsilon (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{\frac{d}{2} - 1} d\epsilon$$

avec  $C_0 = 2 \frac{1}{h^d c^d} \omega_d$ , une constante

Par changement de variables :  $y = \epsilon^2$ ,

(3)

$$N = \Omega_d \frac{1}{2} C_0 \int_{m^2 c^4}^{\epsilon_F^2} (y - m^2 c^4)^{\frac{d}{2} - 1} dy$$

$$N = \Omega_d C_0 \frac{1}{d} (\epsilon_F^2 - m^2 c^4)^{\frac{d}{2}}$$

$n \equiv \frac{N}{\Omega_d}$ , densité des électrons

$$\epsilon_F = \sqrt{m^2 c^4 + \left(\frac{d}{C_0}\right)^{2/d} n^{2/d}}$$

ou encore

$$\epsilon_F = m c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{n}{n_c}\right)^{2/d}}$$

$n_c$  : densité caractéristique.

$$\frac{1}{m^2 c^4} \left(\frac{d}{C_0}\right)^{2/d} = \frac{1}{n_c^{2/d}}$$

\*  $\epsilon_F$  croît, comme il se doit, avec la densité  $n$  des particules.

- Impulsion de Fermi :  $p_F$ .

De la relation établie précédemment :

$$\begin{cases} N = \Omega_d C_0 \frac{1}{d} (\epsilon_F^2 - m^2 c^4)^{d/2} \\ \epsilon_F^2 = p_F^2 c^2 + m^2 c^4, \quad n = \frac{N}{\Omega_d} \end{cases}$$

On trouve :

$$p_F = mc \left( \frac{n}{n_c} \right)^{1/d}$$

\*  $p_F$  croît, comme il se doit avec la densité  $n$  des particules.

- Vecteur d'onde de Fermi :  $k_F$ .

$$p_F = \hbar k_F \rightarrow k_F = \frac{mc}{\hbar} \left( \frac{n}{n_c} \right)^{1/d}$$

\*  $k_F$  croît aussi avec la densité.

- Température de Fermi :  $T_F$ .

$$\epsilon_F = k_B T_F, \quad T_F = \frac{\epsilon_F}{k_B}$$



et

$$T_F = \frac{mc^2}{k_B} \sqrt{1 + \left(\frac{n}{n_c}\right)^{2/d}}$$

\* Aussi  $T_F$  croît avec la densité.

③ Energie interne:  $U$

$$\begin{cases} U = \frac{8\pi\Omega}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 \epsilon(p) dp \\ \epsilon(p) = p^2 c^2 + m^2 c^4 \end{cases}$$

ou encore, d'une manière équivalente:

$$\begin{cases} U = \int_{mc^2}^{\epsilon_F} \epsilon \mathcal{D}(\epsilon) d\epsilon \\ \mathcal{D}(\epsilon) = 8\pi \frac{\Omega}{h^3 c^3} \epsilon (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{1/2} \end{cases}$$

Par application de l'intégrale précédente, l'on trouve:

$$U = \frac{c\Omega}{8\pi^2 h^3} \left\{ p_F (2p_F^2 + m^2 c^2) \sqrt{p_F^2 + m^2 c^2} - (mc)^4 \operatorname{Arg} \operatorname{sh}\left(\frac{p_F}{mc}\right) \right\}$$

④ On part de la relation thermodynamique: ⑥

$$A = U - TS - \mu N \rightarrow A = U - E_F N, \quad T = 0K.$$

On a:

$$* N = \frac{8\pi\Omega}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp$$

$$N = \frac{8\pi\Omega}{h^3} \cdot \frac{1}{3} p_F^3$$

$$* E_F = \sqrt{p_F^2 c^2 + m^2 c^4}$$

On trouve:

$$A = - \frac{c\Omega}{8\pi^2 h^3} \cdot \left\{ p_F \left( \frac{2}{3} p_F^2 - m^2 c^2 \right) \sqrt{p_F^2 + m^2 c^2} + (mc)^4 \operatorname{Argh} \left( \frac{p_F}{mc} \right) \right\}$$

\*  $A < 0$ , comme il se doit.

⑤ On utilise la relation générale ⑦  
 $A = -P\Omega$ , on trouve :

$$P = \frac{c}{8\pi^2 \hbar^3} \left\{ p_F \left( \frac{2}{3} p_F^2 - m^2 c^2 \right) \sqrt{p_F^2 + m^2 c^2} + (mc)^4 \operatorname{Ag} \operatorname{sh} \left( \frac{p_F}{mc} \right) \right\}$$

$P$  dépend du volume  $\Omega$ , à travers  $p_F$ :

$$\frac{N}{\Omega} = \frac{8\pi}{3\hbar} p_F^3 = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} p_F^3$$

\*  $P$  croît avec la densité et décroît avec le volume.

\*  $P \neq 0$ , car les électrons restent en mouvement même à  $T=0K$ , c'est la caractéristique des fermions.

⑥ On trouve :

$$\frac{N}{\Omega} = \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^3 \frac{1}{3\pi^2} \operatorname{sh}^3 \left( \frac{\xi}{4} \right),$$

$$P = \frac{m^4 c^5}{32\pi^2 \hbar^3} \left( \frac{1}{3} \operatorname{sh}(\xi) - \frac{8}{3} \operatorname{sh}\left(\frac{\xi}{2}\right) + \xi \right)$$

$$\frac{U}{\Omega} = \frac{m^4 c^5}{32\pi^2 \hbar^3} (\operatorname{sh} \xi - \xi)$$


---