

Spécialité : Master 2 Académique, Option : Automatique et Informatique Industrielle
Module : *Commande Avancée*, Examen : Partiel

Solution

Questions de cours : (04,00 points)

1. Paramètre incertain : constant mais inconnu; paramètre variable dans le temps : variable et inconnu
2. On peut formuler le problème de commande optimale en ajoutant la contrainte instantanée $x^d(t) - x(t) > 0$.

Exercice 1 : (05,00 points)

1. Modèle du système :

- Énergie cinétique : $T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2(t)$
- Énergie potentielle : $V = \frac{1}{2} K x^2(t)$
- Équation différentielle :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}(t)} \right) - \frac{\partial T}{\partial x(t)} + \frac{\partial V}{\partial x(t)} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}(t)} = \sum_i f_i$$

$$\frac{d(M \dot{x}(t))}{dt} - 0 + K x(t) + 0 = f(t)$$

$$M \ddot{x}(t) + K x(t) = f(t)$$

2. Fonction de transfert $G(s)$:

$$M \ddot{x}(t) + K x(t) = f(t) \rightarrow (M s^2 + K) X(s) = F(s) \Rightarrow G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{M s^2 + K}$$

3. Types des paramètres : masse M paramètre constant, raideur K paramètres variable dans le temps

4. Modèle nominal : à partir de la Figure 1b, on a $2 \leq K \leq 4$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3}$$

Exercice 2 : (06,00 points)

1. Approximation utilisée : différence avant.

2. Fonction de transfert du correcteur $C_d(z)$:

$$C_d(z) = C(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T_s}} = K_c \left(1 + \frac{T_s}{T_i(z-1)} \right)$$

Expression de $u(k)$:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_c \left(1 + \frac{T_s}{T_i(z-1)} \right) \Rightarrow \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_c T_i z + K_c (T_s - T_i)}{T_i(z-1)}$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_c z + K_e \left(\frac{T_s}{T_i} - 1 \right)}{(z-1)} \Rightarrow \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_c + K_e \left(\frac{T_s}{T_i} - 1 \right) z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (1,5)$$

$$u(k) = u(k-1) + K_e e(k) + K_c \left(\frac{T_s}{T_i} - 1 \right) e(k-1)$$

3. Valeur de $u(0)$:

$$u(0) = u(-1) + K_{ea} e(0) + K_{ec} \left(\frac{T_s}{T_{ei}} - 1 \right) e(-1) \quad (1)$$

On a $u(-1) = 0$, $e(0) = y^d(0) - y(0) = 1 - 0 = 1$ et $e(-1) = y^d(-1) - y(-1) = 0 - 0 = 0$. (1,5)

Gain du correcteur à $k = 0$:

$$K_{ea} = \frac{\hat{T}_0}{K_0 \hat{\tau}_0} \left(\frac{10,8 \hat{T}_0 + \hat{\tau}_0}{12 \hat{T}_0} \right) \Rightarrow K_{ea} = \frac{1}{2 \times 1,2} \left(\frac{10,8 \times 1 + 1,2}{12 \times 1} \right) \Rightarrow K_{ea} = \frac{1}{2,4} \quad (0,5)$$

$$u(0) = 0 + \frac{1}{2,4} \times 1 + 0 = \frac{1}{2,4} \quad (0,5)$$

Exercice 3 : (05,00 points)

1. Le modèle sous forme d'état :

$$\dot{x}(t) + \frac{K}{M} x(t) | \dot{x}(t) | = \frac{f(t)}{M} \Rightarrow \dot{x}(t) + \frac{K}{M} x(t) | \dot{x}(t) | = u(t) \quad (0,5)$$

En introduisant le changement de variable : $x_1(t) = x(t)$ et $x_2(t) = \dot{x}(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{K}{M} x_1(t) |x_2(t)| + u(t) \end{aligned} \quad (0,5)$$

2. Conditions terminales :

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(t_f) \\ x_2(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? \\ 0 \end{bmatrix} \text{ est libre} \quad (0,5)$$

3. Contraintes à respecter :

$$|u(t)| \leq u_{\max} \rightarrow \text{Contrainte instantanée} \quad (0,25)$$

4. Critère à maximiser :

$$J(u(t)) = x_1(t_f) \quad (0,25)$$

5. Problème de commande optimale :

$$\max J(u(t)) = x_1(t_f)$$

Sujet à :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{K}{M} x_1(t) |x_2(t)| + u(t) \end{aligned} \quad (0,25)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2(t_f) = 0$$

$$|u(t)| - u_{\max} \leq 0$$

Type du problème de commande optimale : **Mayer**.

6. Conditions d'optimalité (Équation d'Euler-Lagrange) : Pour écrire les conditions d'optimalité, on doit convertir le problème de **Mayer** en un problème de **Lagrange** comme suit :

$$\max J(u(t)) = \int_0^{t_f} x_2(t) dt$$

Sujet à :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{K}{M} x_1(t) |x_2(t)| + u(t)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2(t_f) = 0$$

En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, il vient :

$$\max J(u(t)) = \int_0^{t_f} x_2(t) + \lambda_1(t) (\dot{x}_1(t) - x_2(t)) + \lambda_2 \left(\dot{x}_2(t) + \frac{K}{M} x_1(t) |x_2(t)| - u(t) \right) dt$$

Sujet à :

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2(t_f) = 0$$

Les conditions d'optimalité :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_1(t)} \right) = \frac{K}{M} |x_2(t)| - \frac{d}{dt} (\lambda_1(t)) = \frac{K}{M} |x_2(t)| - \dot{\lambda}_1(t) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_2(t)} \right) = 1 - \lambda_1(t) + \frac{K}{M} x_1(t) - \frac{d}{dt} (\lambda_2(t)) = 1 - \lambda_1(t) + \frac{K}{M} x_1(t) - \dot{\lambda}_2(t) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda_1(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{\lambda}_1(t)} \right) = \dot{x}_1(t) - x_2(t) - \frac{d}{dt} (0) = \dot{x}_1(t) - x_2(t) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda_2(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{\lambda}_2(t)} \right) = \dot{x}_2(t) + \frac{K}{M} x_1(t) |x_2(t)| - u(t) - \frac{d}{dt} (0) = \dot{x}_2(t) + \frac{K}{M} x_1(t) |x_2(t)| - u(t) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial u(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{u}(t)} \right) = -\lambda_2(t) - \frac{d}{dt} (0) = -\lambda_2(t) = 0$$