

لادي الجاح

Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences
Département de Mathématiques et Informatique

Année universitaire : 2011/2012
Section : SMPC1

Epreuve d'Algèbre
Session de Rattrapage
Durée : 1h30mn

EXERCICE 1

I- Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 muni de sa base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, on considère les vecteurs :

$$a = (1, 1, 1, 1), \quad b = (2, 3, 2, 1), \quad c = (4, 1, 1, 1).$$

1) Déterminer les composantes du vecteur $d = a - 3b + 2c$.

2) On pose $g = d + \alpha(e_1 + e_4)$. Pour quelle(s) valeur(s) du réel α , la famille $\{a, b, c, g\}$ est une base de \mathbb{R}^4 .

II- Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^5 on considère les deux familles :

$S = \{u_1, u_2, u_3\}$ où $u_1 = (1, 2, 0, 3, 3)$, $u_2 = (2, 0, 0, 1, 2)$ et $u_3 = (4, 4, 0, 7, 8)$.

$T = \{w_1, w_2, w_3\}$ où $w_1 = (1, 2, 1, -1, 0)$, $w_2 = (-1, 2, 0, 2, 1)$ et $w_3 = (1, 6, 2, 0, 1)$.

1) Déterminer une base de $F = \text{sev}\langle S \rangle$, et une base de $G = \text{sev}\langle T \rangle$.

2) Déterminer une base de $F \cap G$.

EXERCICE 2

Dans l'espace affine \mathbb{R}^3 , soit le point $A(1, -1, -2)$ et les vecteurs

$$\vec{u} = (0, 1, 1), \quad \vec{v} = (1, 1, 0), \quad \vec{w} = (1, 0, 1).$$

1) Vérifier que $R' = (A, \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\})$ est un repère cartésien de \mathbb{R}^3 .

2) On considère le plan $P : x + y - z = 2$.

a) Vérifier que $\vec{u} \in \vec{P}$, et $\vec{w} \in \vec{P}$.

b) Déterminer l'équation cartésienne du plan P par rapport au repère R' .

c) Donner une équation paramétrique et une autre cartésienne du plan P' passant par A et de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} .

d) i) Donner le système d'équations qui définit le sous espace affine $P \cap P'$.

ii) En déduire un repère cartésien de $P \cap P'$.

CLUB NAJAH
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

WICHAM

Epreuve d'Algebre

de 11/12

Rattrapage

El Jajida

Exercice 1 Espace vectoriel \mathbb{R}^4

Rappel des bases canonique

$$e_1 = (1, 0, 0, 0) ; e_2 = (0, 1, 0, 0) ; e_3 = (0, 0, 1, 0)$$

$$e_4 = (0, 0, 0, 1) \text{ des bases canonique trs libre}$$

car parce que c'est une base

$$\text{Donn\u00e9s } a = (1, 1, 1, 1) \quad b = (2, 3, 2, 1) \quad c = (4, 1, 1, 1)$$

$$1) \quad d = a - 3b + 2c \quad ?$$

$$d = (1, 1, 1, 1) + 2(4, 1, 1, 1) - 3(2, 3, 2, 1)$$

$$= (1, 1, 1, 1) + (8, 2, 2, 2) - (6, 9, 6, 3)$$

$$d = (3, -6, -3, 0)$$

$$2) \quad g = d + d(e_1 + e_4)$$

$$= (3, -6, -3, 0) + d((1, 0, 0, 0) + (0, 0, 0, 1))$$

$$g = (3+d, -6, -3, d)$$

CLUB NAJAH
UCD FS. EL JAJIDA
LE PR\u00c9SIDENT

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 + 3L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & d+2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 + 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & d+2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 + 3L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3d+18 & -18 \end{pmatrix}$$

21

21

Pour la valeur de $d \in \mathbb{R}$

à condition de la famille $\{a, b, c, g\}$
base de \mathbb{R}^5 ssi $3d - 18 \neq 0$

$$\boxed{d \neq 6}$$

II Espace Vectoriel de \mathbb{R}^5

1) $F = \text{Ser} \langle S \rangle$? $G = \text{Ser} \langle T \rangle$?

$$* \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F = \text{Ser} \langle U_1, U_2 \rangle$$

$$* \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 + L_1, L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{matrix}$$

$$G = \text{Ser} \langle w_1, w_2 \rangle$$

2) $F \cap G$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{matrix} \xrightarrow{L_3 - L_1, L_4 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} U_1' & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ U_2' & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ W_1' & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ W_2' & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$0 = w_2' - w_1' = (w_2' - u_1') - w_1' = (w_2' - u_1') - (w_1' - u_1')$$

$(w_2 - w_1) + (u_1 - u_2) = 0$
 $\Rightarrow (w_2 - w_1) = -(u_1 - u_2) \Rightarrow u_2 - u_1 = w_2 - w_1$

Donc $\{u_2 - u_1\}$ la base de $F \cap G$

Exercice 2 Espace Affine \mathbb{R}^3

$A(1, -1, 2)$

$\vec{u} = (0, 1, 1) \quad \vec{v} = (1, 1, 0) \quad \vec{w} = (1, 0, 1)$

1) Vérifier $R = \{A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
 x & y & z & & & & & & & \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1
 \end{array}$$

$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1}$
 $\xrightarrow{L_3 - L_1}$
 $\xrightarrow{L_3 - L_2}$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

$z = 0$
 $y = 1$
 $x = -2$

Ainsi que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont d'origine A
 $\Rightarrow \{A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est un repère cartésien

2) $P: x + y - z = 2$

Rappel

Pour vérifier une vecteur $\in P$

$P: ax + by + cz = d \Rightarrow \vec{p} = ax + by + cz = 0$

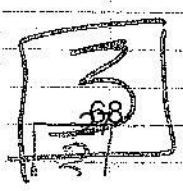
a) $\vec{u} \in P; \vec{v} \in P$

$P: x + y - z = 0$

$\vec{u}: 0 + 1 - 1 = 0 \quad \vec{u} \in P$

$\vec{v}: 1 + 0 - 1 = 0 \quad \vec{v} \in P$

et



Michaël

b) On a $P: x + y - z = 2$

l'origine $O(1 \ 1 \ 0)$ car $1 + 1 - 0 = 2$

Pour la

$$A(1 \ -1 \ -2)$$

$$\vec{OA}(0 \ -2 \ -2)$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\boxed{x + y = -2} \text{ l'équation}$$

Cartésienne

c) l'équation paramétrique

$$(P) \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2 + t + k \\ z = -2 + t + k \end{cases} \quad (k, t) \in \mathbb{R}$$

d) voir la courbe

$$P \cap P'$$

$$\begin{cases} P: ax + by + cz = d \\ P': a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} \quad \text{P confondue ap}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'} \quad P // P'$$

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'} \quad P \times P'$$

CLUB NAJAH
UCD FS EL JADIDA
LE PRÉSIDENT

بسم الله الرحمن الرحيم
جميع المصنفين
بسم الله الرحمن الرحيم
جميع المصنفين
بسم الله الرحمن الرحيم