

الاحتمالات

الحصة الأولى

الأهداف: في نهاية الحصة يصبح المتعلم قادراً على التعامل مع المفاهيم الأساسية في الاحتمالات.

المحفيز: مرتكزات معرفية من خلال تقويم قبلي ومراجعة مفاهيم: الاختبار - فضاء العينة - الحدث - دالة الاحتمال.

التدريس:

- يُطرح مثال تمهيدي بصفته مراجعة للمفاهيم الأولية في الاحتمال.
مثال: رمي حجري نرد معاً (أو أي مثال آخر) .
ويكتب فضاء العينة بطريقة حوارية مع الطلاب.
ثم تكتب بعض الأحداث التي تتعلق بأحداث مميزة:
" الحدث المستحيل - الحدث الأكيد - الحدث البسيط - الحدثان المتنافيان - الحدثان المتتامان أو المتضادان "
- تجري مناقشة دالة الاحتمال وتؤكد منطلقها ومستقرها كدالة عددية لمتغير غير عددي "حدث"
$$P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}, A \mapsto P(A) \in [0,1]$$
- ثم مناقشة تعريف الفضاء الاحتمالي $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ المنتظم.
- ثم مناقشة فكرة احتمال حدث يساوي مجموع احتمالات أحداثه البسيطة.
- والتوصل إلى صيغة احتمال حدث A في فضاء منتظم:
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$
- ثم التفكير ببعض المبرهنات المتعلقة بالدالة الاحتمالية والعمليات على الأحداث.
من خلال مناقشة المثال: إذا كان A, B حدثين من فضاء احتمال $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ حيث:
$$P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

فاحسب: $P(A \cap B), P(A'), P(A \setminus B)$.

الوظيفة: إعطاء وظيفة (لختبر معلوماتك) صفحة (9+10)، والتمرين رقم (2) ص 13.

الحصة الثانية:

الأهداف: تطبيقات على المفاهيم الأساسية في الاحتمالات.

التدعيم: تقويم قبلي.

التدريس: مشاهدة الوظيفة.

ويتم بطريقة حوارية مناقشة الجدول صفحة 9-10 مع الطلاب.

B (6)	B (1)
C (7)	C (2)
C (8)	A (3)
B (9)	C (4)
A (10)	C (5)

وبعدما يتم حل المسألة رقم 2 صفحة 13 ورسم الجدول المجاور

على السبورة.

الحدث A : ظهور 3 نقط على أحد الوجهين فقط.

الحدث B : ظهور وجهين مجموع نقاطهما أصغر تماماً من 7

	1	2	3	4	5	6
1	○	○	○ α	○	○	
2	○	○	○ α	○		
3	○ α	○ α	○ α	α	α	α
4	○	○	α			
5	○		α			
6			α			

$$P(A) = \frac{10}{36}$$

$$P(B) = \frac{15}{36}$$

الحدث $A \cap B$ يدل على ظهور الرقم 3 والمجموع أصغر تماماً من 7

$$P(A \cap B) = \frac{4}{36}$$

الحدث $A \cup B$ يدل على ظهور الوجه ذي النقط الثلاث أو مجموعهما أصغر تماماً من 7

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{21}{36}$$

الحدث $A \cap B'$ يدل على ظهور الوجه ذي النقط الثلاث فقط، ودون أن يكون المجموع أصغر تماماً من 7

$$P(A \cap B') = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

الحدث $A' \cap B'$ عدم ظهور الوجه ذي النقط الثلاث والمجموع أكبر أو يساوي 7.

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = \frac{15}{36}$$

الحدث $A' \cup B'$: عدم ظهور الوجه ذي النقط الثلاث أو المجموع أكبر أو يساوي 7.

$$P(A' \cup B') = P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = \frac{32}{36}$$

$$P(A \setminus B), P((A \cup B)'), P((A \cap B)').$$

الحصة الثالثة:

الأهداف: أن يصبح المتعلم قادراً على حل المسائل باستعمال التوافيق والتراتيب، وتعرف أنواع السحب.

التدبير: بفرض $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

كم مجموعة جزئية مكونة من عنصرين يمكن تشكيلها من المجموعة X ؟

كم مجموعة جزئية مكونة من عنصر واحد يمكن تشكيلها من المجموعة X ؟

كم مجموعة جزئية مكونة من 5 عناصر يمكن تشكيلها من المجموعة X ؟

كم مجموعة جزئية لا تحوي أي عناصر من X ؟

الحل: بطريقة حوارية مع الطلاب نجد أن:

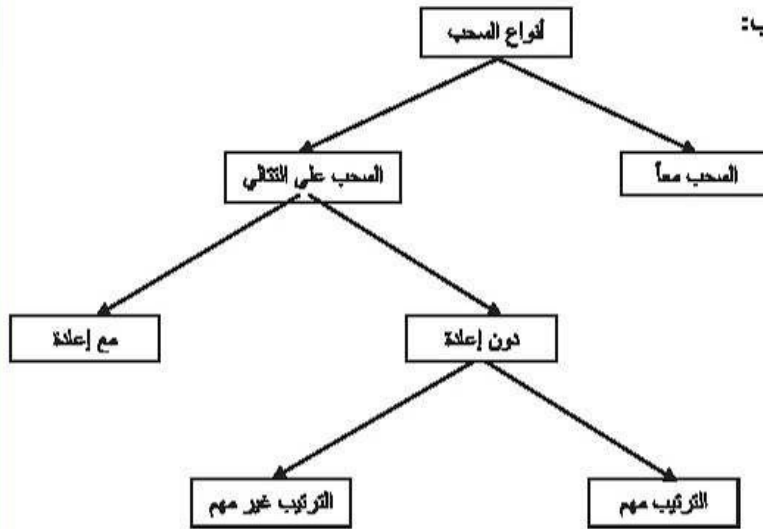
(1) عدد المجموعات الجزئية من X المؤلفة من عنصرين - 10 مجموعات $C(5, 2) = 10$.

(2) عدد المجموعات الجزئية من X المؤلفة من عنصر واحد - 5 مجموعات $C(5, 1) = 5$.

(3) عدد المجموعات الجزئية من X المؤلفة من 5 عناصر - 1 مجموعة $C(5, 5) = 1$.

(4) \emptyset (عدد المجموعات - 1) $C(5, 0) = 1$.

التدريس: تتم مناقشة أنواع السحب:



ملاحظة: عند السحب على التتالي دون إعادة نفترض دوماً أن الترتيب مهم، لأن السحب على التتالي من دون إعادة عندما لا يكون الترتيب مهماً هو نفسه السحب معاً.

ثم يعطى المثال الآتي:

يحتوي صندوق 9 بطاقات متماثلة مرتين بالأرقام من 1 إلى 9، أوجد عدد عناصر فضاء العينة Ω في التجارب الآتية:

- (1) سحب 3 بطاقات على التتالي مع الإعادة.
- (2) سحب ثلاث بطاقات على التتالي من دون إعادة.
- (3) سحب ثلاث بطاقات في آن معاً.

الحل:

(1) يجري سحب البطاقة الأولى بـ 9 طرائق، ويجري سحب الثانية بـ 9 طرائق، ويجري سحب الثالثة بـ 9 طرائق.

$$\text{إذن: } n(\Omega) = 9 \times 9 \times 9 = 721.$$

(2) يجري سحب البطاقة الأولى بـ 9 طرائق، ويجري سحب الثانية بـ 8 طرائق، ويجري سحب الثالثة بـ 7 طرائق.

إذن: $n(\Omega) = 9 \times 8 \times 7 = 514$.

(3) يجري سحب مجموعة جزئية مكونة من ثلاثة عناصر من المجموعة السابقة بـ

$$n(\Omega) = C(9,3) = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

ثم تتم مناقشة التمرين المطول صفحة 11.

التقويم: في صندوق 11 بطاقة متماثلة مرقمة بالأرقام 1,1,1,1,1,2,2,2,2,3,3

(1) احسب عدد عناصر فضاء العينة في حالة سحب ثلاث بطاقات على التوالي مع الإعادة.

(2) نسحب ثلاث بطاقات عشوائياً معاً والمطلوب: ما احتمال الحصول على بطاقة زوجية على الأقل؟

الوظيفة: 5,4,3,1 صفحة 13.

الحصة الرابعة

الأهداف: يصبح المتعلم قادراً على حل المسائل صفحة 13.

التحفيز: مراجعة أنواع السحب مع بيان كيفية استخدام التوافق والترتيب.

التدريس: بعد مناقشة الوظيفة ثم مناقشة التمارين والمسائل مع الطلاب.

المسألة الأولى صفحة 13 :

الحدث A اللجنة من الطلاب فقط.

$$a): P(A) = \frac{C(8,3)}{C(20,3)} = \dots\dots\dots$$

الحدث B اللجنة مؤلفة من طالبتين وطالب فقط .

$$b): P(B) = \frac{C(8,2)C(12,1)}{C(20,3)} = \dots\dots\dots$$

الحدث C طالبة واحدة على الأقل

الطريقة الأولى:

هذا يعني طالبة وطالبين.

أو طالبتين وطالب.

أو ثلاث طالبات.

$$c): P(C) = \frac{C(8,1)C(12,2)}{C(20,3)} + \frac{C(8,2)C(12,1)}{C(20,3)} + \frac{C(8,3)}{C(20,3)} = \dots\dots\dots$$

الطريقة الثانية:

الحدث C هو الحدث المضاد لأن تكون اللجنة مشكلة من 3 طلاب ذكور.

$$P(C) = 1 - \frac{C(12,3)}{C(20,3)} = \dots\dots\dots$$

الحدث D في اللجنة طالب واحد على الأكثر
هذا يعني طالباً ومطالبتين أو ثلاث طالبات.

$$d): P(D) = \frac{C(8,2) \cdot C(12,1)}{C(20,3)} + \frac{C(8,3)}{C(20,3)} = \dots\dots\dots$$

المسألة (3)

الحل:

$$P(A) = \frac{50}{100} \text{ الحدث } A \text{ الطالب يدرس الفرنسية.}$$

$$P(B) = \frac{40}{100} \text{ الحدث } B \text{ الطالب يدرس الإسبانية.}$$

$$P(A \cap B) = \frac{10}{100} \text{ الحدث } A \cap B \text{ الطالب يدرس اللغتين معاً.}$$

(1) الحدث $A \cup B$ يدل على أن يكون الطالب المختار من دارسي اللغة الفرنسية أو اللغة الإسبانية.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{80}{100}$$

(2) الحدث $A' \cap B'$ يدل على أن الطالب الذي تم اختياره لا يدرس اللغة الفرنسية ولا الإسبانية.

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = \frac{20}{100}$$

(3) الحدث $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ يدل على أن الطالب الذي تم اختياره دارساً إحدى اللغتين فقط.

$$P[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] = P(A \setminus B) + P(B \setminus A)$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) = \frac{70}{100}$$

(4) الحدث $A \setminus B$ يدل على أن الطالب الذي تم اختياره يدرس اللغة الفرنسية فقط

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{40}{100}$$

المسألة (4):

الحدث A اللاعب يفوز في المرة الأولى $P(A) = \frac{6}{10}$

الحدث B اللاعب يفوز في المرة الثانية $P(B) = \frac{8}{10}$

الحدث $A \cap B$ اللاعب يفوز في المراتين معاً $P(A \cap B) = \frac{45}{100}$

الحدث $A' \cap B'$ يدل على أن اللاعب يخسر في المراتين:

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - \left[\frac{6}{10} + \frac{8}{10} - \frac{45}{100} \right] = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

المسألة (5):

عدد عناصر فضاء العينة $n(\Omega) = 2^4 = 16$

الحدث A ظهور شعار واحد على الأقل هو الحدث المضاد لعدم ظهور أي شعارات

$$P(A) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

الاحتمال المشروط

الحصة الأولى

الأهداف:

- سيكون الطالب في نهاية هذه الحصة قادراً على :
- تعريف مفهوم الاحتمال المشروط وتعريفه.
- استعمال قانون الاحتمال المشروط في حل المسائل.

التدعيم:

- مناقشة الشكل (أبراج هانوي) في رأس الصفحة في كتاب الطالب صفحة 17، ومناقشة أن أقل عدد من الحركات 7 من أجل ثلاثة أقراص. (لاحظ أن عدد الأبراج ثابت 3)، ولكن عدد الأقراص متغير.
- ويطرح الآتي: لو كان عدد الأقراص 4، فما هو أقل عدد الحركات ليتم نقل الأقراص من برج إلى ضمن الشرط في نص المسألة؟ (لاحظ أن $t_n = 2^n - 1$) أقل عدد من الحركات.

التدريس:

- تتم المناقشة مع الطلاب أن هناك أحداث المعرفة بوقوع أحدها يؤثر في احتمال وقوع الحدث الآخر.
- يطرح المثال الآتي: معهد يضم N طالب وطالبة، يدرس بعضهم اختصاصاً علمياً، ويدرس الباقي اختصاصاً أدبياً... المثال صفحة 14.
- ويعدها يطرح النشاط الوارد صفحة 15.
- ثم يطرح التعريف الوارد صفحة 15 ويناقش.
- في عمل جماعي يتم طرح المسألة: في معهد للغات 75% من الطلبة يدرسون اللغة الإنكليزية و 40% يدرسون اللغة الفرنسية و 35% يدرسون اللغتين معاً. اخترنا عشوائياً طالباً واحداً و المطلوب :
- 1) ما احتمال أن الطالب يدرس الإنكليزية علماً أنه يدرس الفرنسية.
- 2) ما احتمال أن الطالب يدرس الإنكليزية علماً أنه لا يدرس الفرنسية.

الحل:

E حدث أن الطالب يدرس الإنكليزية.

F حدث أن الطالب يدرس الفرنسية.

1) نريد حساب $P_F(E)$:

$$P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{7}{8}$$

2) نريد حساب $P_F(E)$:

$$P_{F'}(E) = \frac{P(E \cap F')}{P(F')} = \frac{P(E) - P(E \cap F)}{1 - P(F)} = \frac{1}{5}$$

التقويم:

يحتوي مغلف 7 بطاقات مرقمة من 1 إلى 7. تسحب عشوائياً بطاقتين معاً، فإذا علمت أن إحدى البطاقتين على الأقل تحمل رقماً زوجياً، فما احتمال أن يكون مجموع رقمي البطاقتين عدداً زوجياً.

الحل:

الحدث A : إحدى البطاقتين على الأقل تحمل رقماً زوجياً.

الحدث B : مجموع رقمي البطاقتين عدد زوجي.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

يقع الحدث A عند حصولنا على بطاقتين تحملان رقمين زوجيين أو بطاقة تحمل رقماً زوجياً وأخرى تحمل رقماً فردياً.

يقع الحدث $A \cap B$ عند حصولنا على بطاقتين تحملان رقمين زوجيين.

$$P(A \cap B) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{42} \text{ و } P(A) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times 2 + \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{30}{42}$$

$$P_A(B) = \frac{1}{5}$$

الوظيفة:

رقم 1 صفحة 21.

الحصة الثانية

حل الوظيفة السابقة.

الأهداف:

سيكون الطالب في نهاية هذه الحصة قادراً على حل مسائل باستخدام الاحتمال المشروط وقاعدة الاحتمال المركب.

التدريس:

- تتم مناقشة النشاط 1 صفحة 15 ويتم طرح التساؤل: هل P_B دالة احتمال على فضاء عينة منتهٍ $(\Omega, P(\Omega))$ ، حيث B حدث يحقق $P(B) \neq 0$ ويتم شرح $P(A \cap B) \leq P(B)$ وذلك مهما كان الحدث A :

(1) من $A \cap B \subseteq B$ نجد $P(A \cap B) \leq P(B)$ ومنه $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1$ إذن $0 \leq P_B(A) \leq 1$.

أي $P_B(A) \in [0,1]$.

$$(2) P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

(3) نتأمل حدثين A_1 و A_2 يحققان $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. أثبت أن $P_B(A_1 \cup A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2)$.
الإثبات:

$$\begin{aligned} P_B(A_1 \cup A_2) &= \frac{P[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{P(B)} = \frac{P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P_B(A_1) + P_B(A_2) \end{aligned}$$

- نلاحظ أن (1) $P_B(A) \in [0,1]$ (2) $P_B(\Omega) = 1$ (3) احتمال اجتماع حدثين متنافيين يساوي احتمال الحدث الأول زائداً احتمال الحدث الثاني.
- إذن يمكن كتابة نص المبرهنة الواردة صفحة 16.

الوظيفة: المسألة رقم 10 عامة.

الحصة الثالثة

حل الوظيفة السابقة.

الأهداف: سيكون الطالب في نهاية هذه الحصة قادراً على استعمال نتائج الاحتمال المشروط وقاعدة الاحتمال المركب في تطبيقات مختلفة.

التدعيم: مناقشة الطلاب في المفاهيم، التي تعلموها عن دالة الاحتمال الشرطي.

التدريس:

- لما كانت P دالة احتمال فإنه يمكن تطبيق جميع خواص دالة الاحتمال.
- نناقش النتائج الواردة صفحة 16، وتستنتج قاعدة الاحتمال المركب من قانون الاحتمال الشرطي.
- والتوصل إلى أن احتمال تقاطع حدثين يساوي احتمال أحدهما مضروباً باحتمال الآخر علماً أن الأول قد وقع.
- وبعدها يناقش النشاط 2 صفحة 16.

التقويم: تحتوي علبة 12 مصباحاً كهربائياً، منها 8 مصابيح لتوفير الطاقة، والباقي مصابيح عادية، اخترنا مصباحين عشوائياً من هذه العلبة واحداً تلو الآخر من دون إعادة:
1. أوجد احتمال أن يكون المصباحان من مصابيح توفير الطاقة.

2. أوجد احتمال أن يكون أحدهما عادياً والآخر لتوفير الطاقة.

الوظيفة: المسألة رقم 2، 3 صفحة 21.

حل المسألة 10 علمة:

بحوي مغلف سبع بطاقات متماثلة مرقمة بالأعداد $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. نسحب من المغلف عشوائياً ثلاث بطاقات بالتتالي من دون إعادة والمطلوب :

a. ما احتمال ظهور البطاقة ذات الرقم 2 بين البطاقات المسحوبة ؟

b. إذا علمت أن مجموع أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة فردي ، فما احتمال أن تكون البطاقة ذات الرقم 2 بينها ؟

الحل:

عدد البطاقات الزوجية 3 بطاقات.

عدد البطاقات الفردية 4 بطاقات.

a. نفترض أن الحدث A : ظهور البطاقة ذات الرقم (2).

يقع الحدث A إذا حصلنا على بطاقة تحمل الرقم 2 وبطاقتين من باقي البطاقات.

هل الحدث A مرتب؟ نلاحظ أنه غير مرتب.

$$P(A) = \frac{C(1,1) \times C(6,2)}{C(7,3)} = \frac{1 \times 15}{35} = \frac{3}{7}$$

$$P(A) = \frac{1}{7} \times \frac{6}{6} \times \frac{5}{5} + \frac{6}{7} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{5} + \frac{6}{7} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{7}$$

أو

حيث $\frac{1}{7} \times \frac{6}{6} \times \frac{5}{5}$ يمثل احتمال سحب البطاقة رقم 2 أولاً و $\frac{6}{7} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{5}$ هو احتمال أن نسحبها ثانياً و

$\frac{6}{7} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{5}$ هو احتمال أن نسحبها ثالثاً.

b. نضع الحدث B : مجموع أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة فردي.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

يقع الحدث B : {عند سحب 3 بطاقات فردية أو سحب بطاقتين زوجيتين وبطاقة فردية} (إن

$$P(B) = \left(\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \right) + \left(\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \right) \times 3 = \frac{4}{35} + \frac{12}{35} = \frac{16}{35}$$

يقع الحدث $A \cap B$: {عند سحب بطاقة فردية، وأخرى زوجية وسحب البطاقة ذات الرقم 2}

$$P(A \cap B) = \left(\frac{1}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \right) \times 6 = \frac{8}{35}$$

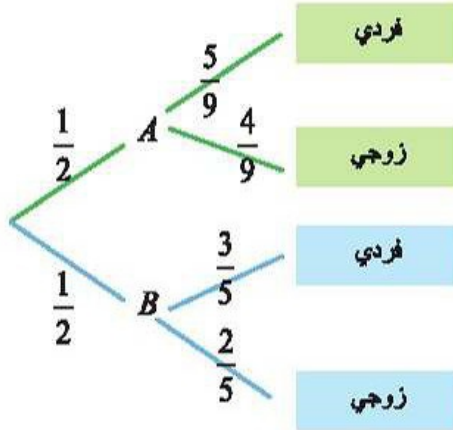
$$\text{إن } P_B(A) = \frac{1}{2}$$

الحصة الرابعة

الأهداف:

سيكون الطالب في نهاية هذه الحصة قادراً على استعمال مخطط لتوضيح كيفية وقوع الحدث المطلوب وحساب احتماله.

التدريس:



يحتوي صندوق (A) على 9 بطاقات مرقمة من 1 إلى 9،
ويحتوي صندوق (B) على 5 بطاقات مرقمة من 1 إلى 5
، اختيار أحد الصندوقين عشوائياً، وسُحبت منه بطاقة،
فإذا كان رقم البطاقة المسحوبة زوجياً، فما احتمال أن
تكون البطاقة قد سُحبت من الصندوق A ؟

الحل :

الحدث A اختيار الصندوق A.

الحدث B اختيار الصندوق B.

الحدث C رقم البطاقة المسحوبة زوجياً.

$C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$ حيث $C \cap A$ سحب بطاقة زوجية من الصندوق A و $C \cap B$ سحب بطاقة زوجية من الصندوق B.

$$\begin{aligned}
 P(C) &= P[(C \cap A) \cup (C \cap B)] \\
 &= P(C \cap A) + P(C \cap B) \\
 &= P(A) \cdot P_A(C) + P(B) \cdot P_B(C) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{19}{45}
 \end{aligned}$$

$$P_c(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{10}{19}$$

ومنه

- مناقشة النشاط 3 صفحة 18.

التقويم: طرح المسألة رقم 4 صفحة 21.

حل مسائل الاحتمال الشرطي

المسألة (1):

(1) الحدث A الطالب يرغب في الرحلة: "بعد قراءة الجدول بشكل جيد: $P(A) = \frac{20}{35}$

(2) الحدث A الطالب يرغب في الرحلة
الحدث B الطالب ذكر.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{11}{16}$$

(3) الحدث D الطالب متزوج.

الحدث C الطالب (أنثى).

$$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{n(C \cap D)}{n(C)} = \frac{6}{19}$$

(4) الحدث G الطالب ذكر.

(5) الحدث K الطالب لا يرغب في الرحلة

$$P_K(G) = \frac{P(G \cap K)}{P(K)} = \frac{n(G \cap K)}{n(K)} = \frac{3}{7}$$

المسألة (2): استناداً إلى نص المسألة: $P(A) = \frac{8}{10}, P(B) = \frac{5}{10}, P_B(A) = \frac{9}{10}$

إذن:

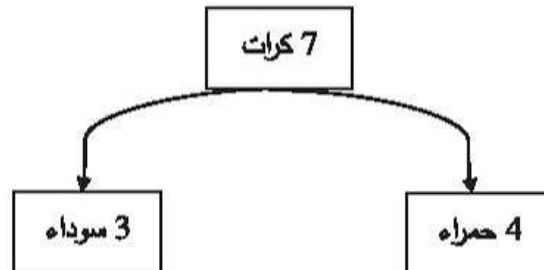
$$P(A \cap B) = P_B(A)P(B) = \frac{9}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{15}{100}$$

$$P_A(B') = 1 - P_A(B) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= 1 - \frac{\frac{15}{100}}{\frac{8}{10}} = \frac{7}{16}$$

المسألة (3):

يمكن تثبيت عدد الكرات
المسحوبة ونوع المسحب
على المسبورة.



نوع المسحب على التتالي من دون إعادة.

عدد الكرات المسحوبة كرتان

(1) الحدث A الكرة الثانية حمراء.

الحدث B الكرة الأولى حمراء.

$$P_B(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ بما أن } B \text{ وقع فإنه يمكن استخدام فضاء العينة الجزئي ويصبح}$$

(2) الحدث C الكرتان المسحوبتان حمراوتان:

$$P(C) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$$

المسألة: (4)

الحدث A "الموظف يستقل القطار في المرحلة الأولى"، لدينا فرضاً $P(A) = \frac{1}{10}$

الحدث A' "الموظف يستقل حافلة في المرحلة الأولى"، فيكون $P(A') = \frac{9}{10}$

ليكن الحدث B "الموظف يصل إلى المنزل سيراً"، فيكون B' هو الحدث "أن يصل الموظف إلى المنزل باستعمال سيارة الأجرة".

تتضمن فرضيات المسألة على أن $P_A(B) = \frac{6}{10}$ و $P_A(B') = \frac{3}{10}$ والمطلوب حساب $P(B)$ من

$$P_A(B') = \frac{3}{10} \text{ نستنتج أن } P_A(B) = 1 - P_A(B') = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

ولما كان الحدثان $A \cap B$ و $A' \cap B$ يكوّنان تجزئة للحدث B ، إذن

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap A') \\ &= P(A)P_A(B) + P(A')P_{A'}(B) \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{61}{100} \end{aligned}$$

الاستقلال الاحتمالي

حل مسائل الاستقلال الاحتمالي

المسألة الأولى: الأحداث مستقلة

(1) مقدمة الحل: الحدث A نجاح الطالب الأول، لدينا $P(A) = \frac{3}{4}$ الحدث B نجاح الطالب الثاني لدينا

$$P(B) = \frac{4}{5}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \quad (1)$$

(2) نجاح أحدهما على الأقل يعني $A \cup B$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{19}{20}$$

المسألة الثانية:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

الحدث A (ظهور الرقم 4 على الحجر الأحمر).

الحدث B (مجموع العددين فردي).

حتى يكون الحدثان A و B مستقلين احتمالياً يجب أن يتحقق الشرط:

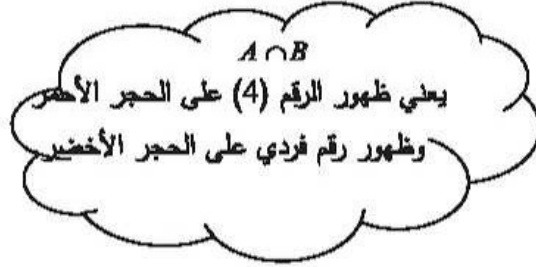
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$A \cap B = \{(1,4), (3,4), (5,4)\}$$

$$(1) P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(A) = \frac{6}{36} \quad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$(2) P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{18}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$



فالشرط محقق وبالتالي الحدثان مستقلان احتمالياً.

يعني ظهور الرقم (4) على الحجر الأحمر وظهور رقم فردي على الحجر الأخضر. $A \cap B$

المسألة (3):

$$\Omega = \left\{ (1,2); (2,2); (3,2); (1,3); (2,3); (3,3); (1,4); (2,4); (3,4); (1,5); (2,5); (3,5) \right\} \quad (a)$$

$$A = \{(1,3), (2,3), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5)\} \quad (b)$$

$$B = \{(1,5), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5)\}$$

$$A \cap B = \{(3,3), (3,4), (3,5)\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad \text{وعليه:}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \text{وكذلك:}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B) \quad \text{إذن:}$$

والحدثان A و B مستقلان احتمالياً.

المسألة (4):

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$$

$$A = \{TTH, THT, HTT, TTT\}$$

$$B = \{TTH, THT, HTT\}$$

$$A \cap B = B$$

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad P(A \cap B) = P(B) = \frac{3}{8} \quad \text{وعليه:}$$

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \quad \text{إذن:}$$

والحدثان A و B غير مستقلين احتمالياً.

المسألة (5):

ليكن A الحدث «إصابة A للهدف» و B الحدث «إصابة B للهدف» ونعتبرهما مستقلين احتمالياً، فيكون حسب الفرض:

$$(2) \dots P(A \cap B') = \frac{7}{25} \quad \text{و} \quad (1) \dots P(A' \cap B') = \frac{3}{25}$$

وبسبب الاستقلال الاحتمالي هذا يكافئ $P(A')P(B') = \frac{3}{25}$ و $P(A)P(B') = \frac{7}{25}$. بجمع هاتين

المساواتين نجد:

$$\frac{3}{25} + \frac{7}{25} = P(A)P(B') + P(A')P(B') = (P(A) + P(A'))P(B') = P(B')$$

ومنه $P(B') = \frac{2}{5}$ أي $P(B) = \frac{3}{5}$ ومن $P(A)P(B') = \frac{7}{25}$ نستنتج أن $P(A) = \frac{7}{10}$
المسألة (6):

الحدث A المريض يعاني من ارتفاع ضغط الدم: $P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

الحدث B المريض مصاب بمرض التهاب الكبد: $P(B) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

واستناداً إلى نص المسألة لدينا $P(A \cap B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

وهنا نلاحظ أن $\frac{1}{5} = P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{20}$

فالحدثان A و B غير مستقلين احتمالياً.

المتغير العشوائي

أولاً: التدريب صفحة 38

المسألة (1):

مجموعة قيم المتغير العشوائي: $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(X=0) = f(0) = \frac{C(5,3)}{C(9,3)} = \frac{5}{42}$$

$$P(X=1) = f(1) = \frac{C(5,2) \cdot C(4,1)}{C(9,3)} = \frac{10}{21}$$

$$P(X=2) = f(2) = \frac{C(5,1) \cdot C(4,2)}{C(9,3)} = \frac{15}{42}$$

$$P(X=3) = f(3) = \frac{C(4,3)}{C(9,3)} = \frac{1}{21}$$

فالقانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو:

r	0	1	2	3
$f_X(r)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{1}{21}$

وتوقعه:

$$E(X) = \sum_{r=0}^3 r f_X(r) = 0 \times \frac{5}{42} + 1 \times \frac{10}{21} + 2 \times \frac{15}{42} + 3 \times \frac{1}{21} = \frac{10}{21} + \frac{5}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4}{3}$$

المسألة (2):

هذا فضاء العينة: $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$ ، ومجموعة قيم

المتحول العشوائي هي $X(\Omega) = \{12, 4, -6\}$. ونرى مباشرة أن:

$$f(12) = \frac{1}{8}, \quad f(4) = \frac{3}{8}, \quad f(-6) = \frac{4}{8}$$

فالقانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو:

r	-6	4	12
$f_X(r)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

وتوقعه:

$$E(X) = \sum_r r f_X(r) = -6 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{3}{8} + 12 \times \frac{1}{8} = -3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

حل تمرينات المتغير العشوائي ص 39

المسألة (1):

- (1) نرمز إلى فضاء العينة بالرمز Ω ، فيكون $n(\Omega) = 10^3 = 1000$
- (2) لنرمز بالرمز W_k إلى الحدث الموافق لسحب كرة بيضاء في المرة k حيث $k = 1, 2, 3$. الحدث المضاد $W'_k = B_k$ يوافق سحب كرة سوداء في المرة k . ولدينا

$$P(B_k) = \frac{3}{5} \quad \text{و} \quad P(W_k) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

ليكن A الحدث الموافق لسحب كرتين بيضاوين على الأقل. إن

$$A = (W_1 \cap W_2 \cap W_3) \cup (B_1 \cap W_2 \cap W_3) \cup (W_1 \cap B_2 \cap W_3) \cup (W_1 \cap W_2 \cap B_3)$$

ولما كانت نتيجة السحب في إحدى المرات لا تتعلق بنتيجة السحب في المرات الأخرى لأن السحب يجري مع الإعادة إذن:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(W_1)P(W_2)P(W_3) + P(B_1)P(W_2)P(W_3) \\ &\quad + P(W_1)P(B_2)P(W_3) + P(W_1)P(W_2)P(B_3) \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{8+36}{125} = \frac{44}{125} \end{aligned}$$

- (3) مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(X=0) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = (P(B))^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(W_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap W_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap W_3) \\ &= 3P(W) \cdot P(B)^2 = 3\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{125} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(B_1 \cap W_2 \cap W_3) + P(W_1 \cap B_2 \cap W_3) + P(W_1 \cap W_2 \cap B_3) \\ &= 3P(W)^2 \cdot P(B) = 3\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{36}{125} \end{aligned}$$

$$P(X=3) = P(W_1 \cap W_2 \cap W_3) = (P(W))^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$$

r	0	1	2	3
$f_X(r)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$$E(X) = \sum_{r=0}^3 r f_X(r) = 0 + \frac{54}{125} + \frac{72}{125} + \frac{24}{125} = \frac{150}{125} = \frac{6}{5}$$

المسألة (2):

أولاً:

$$P(A) = \frac{C(3,2)}{C(9,2)} = \frac{1}{12} \quad (1)$$

$$P(B) = \frac{C(2,2) + C(3,2) + C(4,2)}{C(9,2)} = \frac{5}{18} \quad (2)$$

$$P(C) = \frac{C(2,1)C(3,1) + C(3,1)C(4,1) + C(4,1)C(2,0)}{C(9,2)} = \frac{6+12+8}{36} = \frac{13}{18} \quad (3)$$

نلاحظ أن : الحدث C هو الحدث المضاد لمحبب كرتين من لون واحد أي: $P(C) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$

ثانياً: مجموعة قيم X هي $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$f(0) = \frac{C(2,2)}{C(9,2)} = \frac{1}{36}$$

$$f(1) = \frac{C(2,1)C(3,1)}{C(9,2)} = \frac{1}{6}$$

$$f(2) = \frac{C(2,1)C(4,1) + C(3,2)}{C(9,2)} = \frac{11}{36}$$

$$f(3) = \frac{C(4,1)C(3,1)}{C(9,2)} = \frac{1}{3}$$

$$f(4) = \frac{C(4,2)}{C(9,2)} = \frac{1}{6}$$

r	0	1	2	3	4
$f_x(r)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

والتوقع:

$$E(X) = \sum_{r=0}^4 r f_x(r) = 0 + \frac{1}{6} + \frac{11}{18} + 1 + \frac{2}{3} = \frac{22}{9}$$

المسألة (3)

ياخذ X قيمه في $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ ونجد:

$$f(0) = P(\{TTT\}) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64},$$

$$f(1) = P(\{TTH, THT, HTT\}) = 3 \cdot \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64},$$

$$f(2) = P(\{THH, HTH, THH\}) = 3 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64},$$

$$f(3) = P(\{HHH\}) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

r	0	1	2	3
$f_X(r)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

والتوقع:

$$E(X) = \sum_{r=0}^3 r f_X(r) = 0 + \frac{9}{64} + \frac{54}{64} + \frac{81}{64} = \frac{9}{4}$$

المسألة (4):

(1) حسب تعريف المتتالية الحسابية:

P_1 الحد الأول

$P_2 = P_1 + \frac{1}{12}$ الحد الثاني

$P_3 = P_1 + \frac{2}{12}$ الحد الثالث

$P_m = P_1 + \frac{3}{12}$ الحد الرابع

حسب تعريف تابع الاحتمال: $P_1 + P_2 + P_3 + P_m = P(\Omega)$ ، ومنه $4P_1 + \frac{6}{10} = 1$. نستنتج أن

$$P_1 = \frac{1}{8} = \frac{3}{24}, \text{ ومن ثم } P_2 = \frac{5}{24} \text{ و } P_3 = \frac{7}{24} \text{ و } P_m = \frac{9}{24}$$

(2) $X(\Omega) = \{1, 2, 3, m\}$ ، وقانون X هو

r	1	2	3	m
$f_X(r)$	$\frac{3}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{9}{24}$

والتوقع:

$$E(X) = \sum_r r f_X(r) = \frac{3}{24} + \frac{10}{24} + \frac{21}{24} + \frac{9m}{24} = \frac{9m+34}{24}$$

$$\text{ولكن لدينا فرضاً } E(X) = \frac{53}{12} \text{ إذن } \frac{9m+34}{24} = \frac{53}{12} \text{ أو } m = 8$$

المسألة (5):

سحب كرة واحدة فقط

$$P(C) = \frac{8}{33}, P(B) = \frac{10}{33}, P(A) = \frac{15}{33} \quad (1)$$

$$X(S) = \{2, 5, \alpha\} \quad (2) \text{ لدينا}$$

$$f(\alpha) = P(A) = \frac{15}{33} \text{ و } f(5) = P(C) = \frac{8}{33} \text{ و } f(2) = P(B) = \frac{10}{33}$$

وقانون X هو

r	2	5	α
$f_X(r)$	$\frac{10}{33}$	$\frac{8}{33}$	$\frac{15}{33}$

والتوقع:

$$E(X) = \sum_r r f_X(r) = \frac{20}{33} + \frac{40}{33} + \frac{15\alpha}{33} = \frac{5(4+\alpha)}{11}$$

ولكن لدينا فرضاً $E(X) = 0$ إذن $\alpha = -4$.

المسألة (6): $X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5\}$

$$f(2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}, \quad f(3) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times 2 = \frac{2}{5},$$

$$f(4) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} \times 2 = \frac{4}{15}, \quad f(5) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{15}.$$

وقانون X هو:

r	2	3	4	5
$f_X(r)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

والتوقع:

$$E(X) = \sum_r r f_X(r) = \frac{2}{5} + \frac{6}{5} + \frac{16}{15} + \frac{10}{15} = \frac{10}{3}$$

المسألة (7):

الحدث A "مازن يسجل هدفاً".

الحدث B "مجد يسجل هدفاً". الحدثان A و B مستقلان احتمالياً إذن كذلك يكون الحدثان A' و B .

وكذلك يكون الحدثان A' و B' . استناداً إلى الفرض لدينا $P(A' \cap B') = \frac{3}{25}$ و $P(A \cap B') = \frac{7}{25}$

إذن $P(B) = 1 - P(B') = \frac{3}{5}$ ومن ثم $P(B') = P(A \cap B') + P(A' \cap B') = \frac{7}{25} + \frac{3}{25} = \frac{2}{5}$.

ومن جهة أخرى، لأن $\frac{2}{5} = P(A \cap B') = P(A)P(B') = P(A) \cdot \frac{3}{5}$ ، استنتجنا أن $P(A) = \frac{7}{10}$.

مجموعة قيم المتحول العشوائي X هي: $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

$$f_X(0) = P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B') = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{25}$$

$$f_X(2) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{50}$$

$$f_X(1) = 1 - f_X(0) - f_X(2) = \frac{23}{50}$$

وقانون X هو:

r	0	1	2
$f_X(r)$	$\frac{6}{50}$	$\frac{23}{50}$	$\frac{21}{50}$

والتوقع:

$$E(X) = \sum_r r f_X(r) = \frac{23}{50} + \frac{42}{50} = \frac{13}{10}$$

المسألة (8):

نوع السحب على التتالي دون إعادة، والترتيب مهم

$$P(A) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{3}$$

$$\text{إذن } P(A) = \frac{3}{10}$$

مجموعة قيم المتحول العشوائي: $X(\Omega) = \{2, 3, 4\}$ ، ونجد:

$$f(2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

$$f(3) = P(A) = \frac{3}{10}$$

$$f(4) = 1 - f(2) - f(3) = 1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$$

وقانون X هو:

r	2	3	4
$f_X(r)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

والتوقع:

$$E(X) = \sum_r r f_x(r) = \frac{2}{10} + \frac{9}{10} + \frac{24}{10} = \frac{7}{2}$$

المسألة (9):

الطلب (1):

ليكن A الحدث "السحب من الصندوق الأول" فيكون A' هو الحدث الموافق للسحب من الصندوق الثاني. ونظراً إلى أن السحب يجري من صندوقين متماثلين يُختار أحدهما عشوائياً استنتجنا أن:

$$P(A) = P(A') = \frac{1}{2}$$

ليكن B هو الحدث الموافق لكون مجموع البطاقتين زوجياً.

وضوحاً $P_A(B)$ هو احتمال سحب الكرتين الفرديتين من الصندوق الأول إذن $P_A(B) = \frac{C(2,2)}{C(3,2)} = \frac{1}{3}$

أما $P_{A'}(B)$ فهو احتمال سحب الكرتين الفرديتين معاً أو الكرتين الزوجيتين معاً من الصندوق الثاني إذن:

$$P_{A'}(B) = \frac{C(2,2) + C(2,2)}{C(4,2)} = \frac{1}{3}$$

وعليه يكون:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A' \cap B) \\ &= P(A)P_A(B) + P(A')P_{A'}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

الطلب (2):

الاحتمال المطلوب هو $P_B(A')$. ولكن نستنتج من الطلب السابق أن $P(B) = P_A(B)$ ، إذن الحدثان A و B مستقلان احتمالياً، وهذا يقتضي كما نعلم أن الحدثين A' و B' مستقلان احتمالياً أيضاً. وعلى وجه

الخصوص يكون لدينا $P_{B'}(A') = P(A') = \frac{1}{2}$

الطلب (3) مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي: $X(\Omega) = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$f(5) = \frac{C(2,2)C(1,1)}{C(3,2)C(4,1)} = \frac{1}{12}$$

$$f(6) = \frac{C(2,2)C(1,1) + C(2,2)C(1,1)}{C(3,2)C(4,1)} = \frac{2}{12}$$

$$f(7) = \frac{C(2,2)C(1,1) \times 3}{C(3,2)C(4,1)} = \frac{3}{12}$$

$$f(8) = \frac{C(2,2)C(1,1) \times 3}{C(3,2)C(4,1)} = \frac{3}{12}$$

$$f(9) = \frac{C(2,2)C(1,1)}{C(3,2)C(4,1)} = \frac{2}{12}$$

$$f(10) = \frac{C(2,2)C(1,1)}{C(3,2)C(4,1)} = \frac{1}{12}$$

وقانون X هو:

r	5	6	7	8	9	10
$f_X(r)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

والتوقع:

$$E(X) = \sum_r r f_X(r) = \frac{5}{12} + \frac{12}{12} + \frac{21}{12} + \frac{24}{12} + \frac{18}{12} + \frac{10}{12} = \frac{15}{2}$$