

## Chapitre 2: Transformée en z des systs échantillonnés

1/ Introduction: Soit  $f^*(t)$  un signal causal échantillonné de période d'échantillonnage  $T$ :  $f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT)$

on cherche à calculer la transformée de Laplace de  $f^*(t)$ :

$$\begin{aligned} F^*(s) &= T.L. [f^*(t)] = T.L. \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \times T.L. [\delta(t - kT)] \\ \boxed{F^*(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTs}} \end{aligned}$$

### 2/ Transformée en z:

A - Méthode de la série: La transformée en z d'un signal échantillonné est obtenue à partir de la T.L. en posant:  $\boxed{z = e^{Ts}}$

on a note: 
$$\begin{aligned} F(z) &= Z[F(s)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} \\ &= f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots + f(kT)z^{-k} \end{aligned}$$

### B - Méthode des résidus:

On peut calculer la T.z à partir de  $F(s)$  en utilisant le Théorème des résidus:

$$\boxed{F(z) = \sum_{\substack{p_i \\ \text{pôles de } F(s)}} \text{résidus de } \frac{F(s)}{1 - e^{Ts} z^{-1}} \Big|_{s=p_i}}$$

a - Lorsque  $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  a des pôles simples, le résidu correspondant à l'un de ces pôles a pour expression:

$$r_i = \frac{N(p_i)}{\frac{d}{ds} [D(s) (1 - e^{Ts} z^{-1})] \Big|_{s=p_i}} = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \frac{1}{1 - e^{T p_i} z^{-1}}$$

$$\text{et } \boxed{F(z) = \sum_{p_i} \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \frac{1}{1 - e^{T p_i} z^{-1}}}$$

2. Dans le cas on  $F(v)$  a des pôles multiples, le résidus correspondant à l'un de ces pôles multiples  $p_i$  a pour expression:

$$r_i = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dv^{n-1}} \left[ (v-p_i)^n F(v) \times \frac{1}{1-e^{iv}z^{-1}} \right] \right\}_{v=p_i}$$

Exemple 1: trouver par deux méthodes différentes la T.Z d'un échelon unitaire:

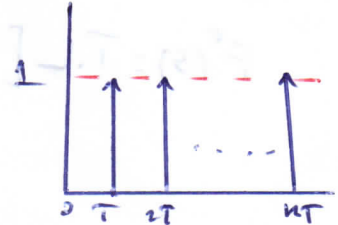
Méthode de série:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-k}$$

$$\Rightarrow f(z) - 1 = z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-k} = z^{-1} F(z)$$

$$\Rightarrow F(z) - 1 = z^{-1} F(z)$$

$$\Rightarrow (1 - z^{-1}) F(z) = 1 \Leftrightarrow F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$



Méthode de résidus:

$$F(z) = \sum \text{résidus} \frac{1}{v(1 - e^{iv} z^{-1})} \Big|_{v=p_i} / F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = 1/s$$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{1}{v(1 - e^{iv} z^{-1})} \Big|_{v=0} = \frac{1}{1 - e^0 z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Exemple 2: trouver la T.Z de la fonction de transfert suivante:

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

1/M de série: on a:  $F(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{(s+1)} \Rightarrow f(t) = -1 + t + e^{-t}$

$$Z[-1] = -\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = -\frac{z}{1-z}$$

$$Z[t] = \sum_{k=0}^{\infty} kT z^{-k} = T \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} \quad / \quad \text{on a: } z \frac{d}{dz} z^{-k} = -k z^{-k}$$

$$= T \sum_{k=0}^{\infty} (-z \frac{d}{dz} z^{-k}) = -Tz \frac{d}{dz} \left( \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \right) = -Tz \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$Z[e^{-t}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-T} z^{-1})^k = \frac{1}{1 - (e^{-T} z^{-1})} = \frac{1}{1 - e^{-T} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-T}}$$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{z}{1-z} + \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{z}{z - e^{-T}}$$

M de residues:

$$r_1 = \frac{(v+1)}{v^2(v+1)(1-e^{Tv}z^{-1})} \Big|_{v=-1}^2 \frac{1}{v^2(1-e^{Tv}z^{-1})} \Big|_{z=-1}^1 = \frac{1}{1-\bar{e}^T z^{-1}} = \frac{z}{z-\bar{e}^T}$$

$$r_2 = \frac{d}{dv} \left[ \frac{v^2}{v^2(v+1)(1-e^{Tv}z^{-1})} \right]_{v=0} = \frac{d}{dv} \left[ \frac{1}{(v+1)(1-e^{Tv}z^{-1})} \right]_{v=0}$$

$$= - \left[ \frac{1-e^{Tv}z^{-1} + (v+1)(-Te^{Tv}z^{-1})}{[(v+1)(1-e^{Tv}z^{-1})]^2} \right]_{v=0} = - \frac{[1-\bar{e}^T - T\bar{e}^T]}{(1-\bar{e}^T)^2}$$

$$= - \frac{1}{(1-\bar{e}^T)} + \frac{T\bar{e}^T}{(1-\bar{e}^T)^2} = \frac{z}{1-z} + \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow F(z) = r_1 + r_2 = \frac{z}{z-\bar{e}^T} + \frac{z}{1-z} + \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

3/ Propriétés de la TZ:

Linéarité:  $Z[\lambda_1 f_1(t) \pm \lambda_2 f_2(t)] = \lambda_1 F_1(z) \pm \lambda_2 F_2(z)$

Translation temporelle:  $Z[f(t-nT)] = z^{-n} F(z)$  Retard.

Multiplication par  $a^k$ :

$$Z[f(t+nT)] = z^{+n} \left[ F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} F(kT) \bar{e}^k \right] \text{ Avance.}$$

Multiplication par le temps:

$$Z[t f(t)] = -Tz \frac{d}{dz} F(z)$$

Translation complexe:

$$Z[e^{\mp at} f(t)] = F(z e^{\pm aT})$$

Théorème de la valeur initiale:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

Théorème de la valeur finale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1-\bar{e}^T) F(z)] \text{ / si la limite existe.}$$

Exemple: Calculer  $Z[\sin(\omega t)]$  et  $Z[\cos(\omega t)]$

On a:  $\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$  et  $\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$

on a aussi:  $Z[e^{j\omega t}] = \frac{1}{1-(ze^{j\omega T})^{-1}} = \frac{z}{z-e^{j\omega T}}$

$$Z[e^{-j\omega t}] = \frac{1}{1-(ze^{-j\omega T})^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-j\omega T}}$$



$$Z[\sin(\omega t)] = \frac{1}{2j} \left[ \frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right] = \frac{1}{2j} \left[ \frac{z^2 - z e^{-j\omega T} - z + z e^{j\omega T}}{(z - e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})} \right] = \frac{z \left( \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{2j} \right)}{z^2 - z(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) + 1}$$

$$Z[\sin(\omega t)] = \frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$$

et de la même façon on trouve:

$$Z[\cos(\omega t)] = \frac{z^2 - z \cos(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$$

#### 4 / transformée en z inverse:

La transformée en z inverse est l'application qui associe à  $F(z)$  la suite des coefficients  $f(kT)$ ,  $k=0, 1, \dots$ , elle est définie par:

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z) z^{k-1} dz$$

Remarque: l'intégrale précédente est difficile à évaluer. Heureusement il existe des méthodes plus simples pour calculer la T.z inverse.

#### A - Méthode des résidus:

$$f(kT) = \sum_{\substack{p_i \text{ ples} \\ \text{de } F(z)}} [\text{résidus de: } z^{k-1} F(z)]_{z=p_i}$$

exemple: calculer la T.z inverse de:  $F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$

$$z^{k-1} F(z) = \frac{Tz^{k-1}}{(z-1)^2} = \frac{Tz^k}{(z-1)^2} \Rightarrow f(kT) = \text{résidus de } z^{k-1} F(z)$$

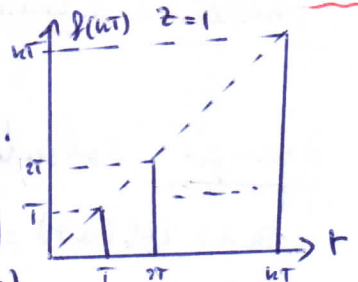
$$f(kT) = \frac{d}{dz} \left[ \frac{Tz^k}{(z-1)^2} \right]_{z=1} = \frac{d}{dz} [Tz^k]_{z=1} = kT z^{k-1} \Big|_{z=1} = kT \cdot 1 = kT$$

$$\Rightarrow f(0) = 0; f(T) = T; f(2T) = 2T; \dots; f(kT) = kT$$

$$\Rightarrow f(t) = f(0) + f(T) \delta(t-T) + f(2T) \delta(t-2T) + \dots + f(kT) \delta(t-kT)$$

$$= 0 + T \delta(t-T) + 2T \delta(t-2T) + \dots + kT \delta(t-kT)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} kT \delta(t-kT)$$

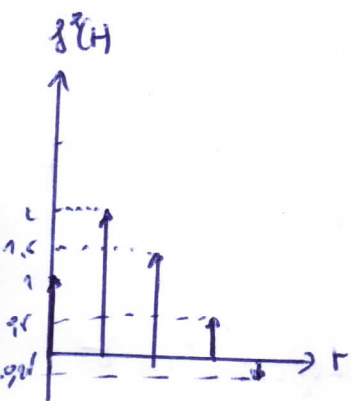


## B. Méthode de division

Lorsque  $F(z)$  se présente sous la forme d'une fonction rationnelle en  $z$  (ou en  $z^{-1}$ ), il suffit de diviser le numérateur sur le dénominateur pour obtenir une série en  $z^{-1}$  dont les coefficients sont les  $f(kT)$ .

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = f(0) + f(T) z^{-1} + f(2T) z^{-2} + \dots$$

Exemple: Calculer la T.T. inverse de:  $F(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$



$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} - 1 + z^{-1} \\ 1 - z^{-1} + 0.5z^{-2} \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 1 - z^{-1} + 0.5z^{-2} \\ 1 + 2z^{-1} + 1.5z^{-2} + 0.5z^{-3} - 0.5z^{-4} - \dots \end{array} \right. \\ \hline \begin{array}{r} 2z^{-1} - 0.5z^{-2} \\ 2z^{-1} - 2z^{-2} + z^{-3} \\ \hline 1.5z^{-2} - z^{-3} \\ 1.5z^{-2} - 1.5z^{-3} + 0.75z^{-4} \\ \hline -0.5z^{-3} - 0.75z^{-4} \\ 0.5z^{-3} - 0.5z^{-4} + 0.25z^{-5} \\ \hline -0.25z^{-4} - 0.25z^{-5} \\ \vdots \end{array} \end{array}$$

ce que nous donne:

$$f(0) = 1; f(T) = 2; f(2T) = 0.5; f(3T) = -0.5$$

ou  $f(4T) = -0.25$

$$\Rightarrow f^*(H) = \delta(t) + 2\delta(t-T) + 0.5\delta(t-2T) - 0.5\delta(t-3T) - 0.25\delta(t-4T) + \dots$$

## C. Méthode des fonctions rationnelles:

La méthode est la même que pour le calcul de la T.L. inverse par fonctions rationnelles

$$Z[Ae^{-at}] = \frac{A}{1 - z^{-1}e^{-aT}} \Rightarrow Z[Ab^k] = \frac{A}{1 - z^{-1}b^T}$$

Si on a:  $F(z) = \frac{A}{1 - \alpha z^{-1}} + \frac{B}{1 - \beta z^{-1}} + \dots$ , alors:  $f(kT) = A\alpha^k + B\beta^k$

Exemple: Calculer la T.L. inverse de:  $1/F(z) = \frac{1}{z^3}$

on a:  $F(z) = \frac{z^3}{(z-0.5)(z-0.75)(z-1)} = \frac{Az}{(z-0.5)} + \frac{Bz}{(z-0.75)} + \frac{Cz}{(z-1)}$

$$A = \left. \frac{z^2}{(z-0.75)(z-1)} \right|_{z=0.5} = \frac{0.25}{(-0.25)(-0.5)} = 2; \quad B = \left. \frac{z^2}{(z-0.5)(z-1)} \right|_{z=0.75} = \frac{0.5625}{(0.25)(-0.25)} = -9$$

$$C = \left. \frac{z^2}{(z-0.5)(z-0.75)} \right|_{z=1} = \frac{1}{(0.5)(0.25)} = 8 \Rightarrow F(z) = 2 \frac{z}{(z-0.5)} - 9 \frac{z}{(z-0.75)} + 8 \frac{z}{(z-1)}$$

$$\Rightarrow f(k) = 2(0.5)^k - 3(0.75)^k + 8$$

$$L/ F(z) = \frac{12z}{(z+1)(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{Az}{(z+1)} + \frac{Bz}{(z-1)} + \frac{Cz}{(z-1)^2} \quad \left( \text{or } F(z) = \frac{A}{(z+1)} + \frac{B}{(z-1)} + \frac{C}{(z-1)^2} \right) \checkmark$$

$$A = \frac{12}{(z-1)^2} \Big|_{z=-1} = 3 \quad / \quad B = \frac{d}{dz} \left( \frac{12}{z+1} \right) \Big|_{z=1} = -\frac{12}{(z+1)^2} \Big|_{z=1} = -3 \quad / \quad C = \frac{12}{(z+1)} \Big|_{z=1} = 6$$

$$\Rightarrow F(z) = 3 \frac{z}{[z-(-1)]} - 3 \frac{z}{z-1} + 6 \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow f(k) = 3(-1)^k - 3 + 6k$$