



<p>COURS DE MATHEMATIQUES Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom</p>

Les nombres complexes

Conjugué

Ce cours porte exclusivement sur la notion de conjugué relative aux nombres complexes.

1 L'idée générale

Les nombres complexes ne sont pas forcément réels au sens où ils peuvent posséder une partie imaginaire. Cette partie imaginaire permet d'envisager par exemple l'écriture de la racine carrée d'un nombre négatif, ou même la résolution d'une équation du second degré dont le discriminant est négatif.



2 La théorie

2.1 Le conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, avec a et b des réels.
On appelle conjugué de z le nombre complexe noté \bar{z} et défini par $\bar{z} = a - ib$.

2.2 Les propriétés du conjugué

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes, avec a, b, a' et b' des réels.

Les propriétés qui impliquent la notion de conjugué s'écrivent :

$$\overline{\bar{z}} = z$$

$$z + \bar{z} = 2a$$

$$z - \bar{z} = i2b$$

$$z \times \bar{z} = a^2 + b^2$$

z est un réel signifie que $z = \bar{z}$

z est un imaginaire pur signifie que $z = -\bar{z}$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$\forall z \neq 0 \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$\forall z' \neq 0 \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$



3 Attention !

Le conjugué d'un nombre complexe ne doit pas être confondu avec son opposé.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, avec a et b des réels. Le conjugué \bar{z} de z s'écrit $\bar{z} = a - ib$, alors que l'opposé de z est $-z = -a - ib$.

4 Par cœur

Toutes les propriétés qui impliquent la notion de conjugué doivent être connues par cœur.



5 Exercices pratiques

5.1 Exercice 1

Soient les nombres complexes $z_1 = \frac{2+7i}{3-4i}$ et $z_2 = \frac{2-7i}{3+4i}$.

Sans effectuer le moindre calcul, montrer que $z_1 + z_2$ est un réel, et que $z_1 - z_2$ est un imaginaire pur.

$$z_1 = \frac{2+7i}{3-4i}$$

Les propriétés relatives aux conjugués permettent d'écrire :

$$\bar{z}_1 = \overline{\left(\frac{2+7i}{3-4i}\right)}$$

$$\bar{z}_1 = \frac{\overline{(2+7i)}}{\overline{(3-4i)}}$$

$$\bar{z}_1 = \frac{2-7i}{3+4i}$$
$$\bar{z}_1 = z_2$$

z_1 et z_2 sont donc conjugués, ce qui signifie que : $z_1 = \bar{z}_2$ et $z_2 = \bar{z}_1$.

La méthode consiste maintenant à appliquer encore les propriétés relatives aux conjugués.

Puisque z_1 et z_2 sont conjugués, la somme $z_1 + z_2$ est égale au double de la partie réelle de z_1 (ou de z_2), ce qui signifie que $z_1 + z_2$ est un réel.

De même, puisque z_1 et z_2 sont conjugués, la différence $z_1 - z_2$ est égale à i multiplié par le double de la partie imaginaire de z_1 (ou de $-z_2$), ce qui signifie que $z_1 - z_2$ est un imaginaire pur.



5.2 Exercice 2

Ecrire sous forme algébrique le conjugué du nombre complexe

$$z = (4 - i\sqrt{3})(1 - i)$$

.

La méthode consiste dans un premier temps à écrire z sous forme algébrique, pour ensuite en déduire la forme algébrique de son conjugué \bar{z} .

$$\begin{aligned} z &= (4 - i\sqrt{3})(1 - i) \\ z &= 4 - 4i - i\sqrt{3} + i^2\sqrt{3} \\ z &= 4 - 4i - i\sqrt{3} - 1 \times \sqrt{3} \\ z &= 4 - \sqrt{3} - i(4 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

La forme algébrique du conjugué \bar{z} de z s'écrit donc $\bar{z} = 4 - \sqrt{3} + i(4 + \sqrt{3})$.



5.3 Exercice 3

Ecrire sous forme algébrique le conjugué du nombre complexe

$$z = \frac{2+i}{3-i}$$

.

La méthode consiste dans un premier temps à écrire z sous forme algébrique, pour ensuite en déduire la forme algébrique de son conjugué \bar{z} .

$$z = \frac{2+i}{3-i}$$

Il s'agit ici de se débarrasser de l'écriture imaginaire du dénominateur. Pour ce faire, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

$$\begin{aligned} z &= \frac{2+i}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i} \\ z &= \frac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} \\ z &= \frac{6+2i+3i+i^2}{3^2-i^2} \\ z &= \frac{6+5i-1}{9-(-1)} \\ z &= \frac{5+5i}{10} \\ z &= \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} \end{aligned}$$

La forme algébrique du conjugué \bar{z} de z s'écrit donc $\bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$.



5.4 Exercice 4

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $3\bar{z} - 2iz = 2 - 3i$.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, avec a et b des réels.
Soit ξ , le premier terme de l'équation. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\xi &= 3\bar{z} - 2iz \\ \xi &= 3(a - ib) - 2i(a + ib) \\ \xi &= 3a - 3ib - 2ia - 2i^2b \\ \xi &= 3a - 3ib - 2ia + 2b \\ \xi &= 3a + 2b - i(2a + 3b)\end{aligned}$$

Or $\xi = 3\bar{z} - 2iz = 2 - 3i$, ce qui signifie que :

$$3a + 2b - i(2a + 3b) = 2 - 3i$$

Résoudre cette équation revient à effectuer l'égalité de deux nombres complexes, c'est-à-dire à la fois l'égalité des parties réelles et l'égalité des parties imaginaires, ce qui consiste en fait à résoudre le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{aligned}\begin{cases} 3a + 2b &= 2 \\ 2a + 3b &= 3 \end{cases} \\ \begin{cases} a &= \frac{2}{3}(1 - b) \\ 2 \times \frac{2}{3}(1 - b) + 3b &= 3 \end{cases} \\ \begin{cases} a &= \frac{2}{3}(1 - b) \\ \frac{4}{3} - \frac{4}{3}b + 3b &= 3 \end{cases}\end{aligned}$$



$$\begin{cases} a = \frac{2}{3}(1-b) \\ b\left(3 - \frac{4}{3}\right) = 3 - \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{2}{3}(1-b) \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

La solution de l'équation est donc le nombre complexe imaginaire pur $z = i$.